A-16

やさしい粉の数学

誰にでもわかるテンソル（Ⅲ）

椿　　淳一郎*　　森　　英　利*
Jun-ichiro TSUBAKI　　Hidetoshi MORI

誰にでもわかるテンソル（Ⅲ）

椿　淳一郎*　森　英利*
Jun-ichiro TSUBAKI　Hidetoshi MORI

2.3.5　テンソル不変量

テンソルは座標系のとり方によって，その成分は変るが，いずれの座標系のテンソルからでも特性方程式(60)を使うことにより，対角成分 λ_1，λ_2，λ_3 だけのテンソルに変換することができる。したがって，特性方程式の λ の係数は，いずれの座標系のテンソルでも同じでなければならず，この係数をテンソルの不変量といい，それぞれ次のように呼ばれている。

$$I_1=\text{トレース}=T_{11}+T_{22}+T_{33} \qquad \cdots\cdots(85)$$

$$I_2=\text{主2次小行列式の和}$$
$$=\begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(86)$$

$$I_3=\text{行列式}=\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(87)$$

3.　Hooke の法則

これまで応力テンソル $\boldsymbol{T}$ とひずみテンソル $\boldsymbol{\Phi}$ を例にとってテンソルの概念を述べてきた。粉体層の力学を含む連続体の力学は，応力とひずみの関係式（構成方程式）を求めそれを解くことにある。この構成方程式は弾性体，塑性体，粘性体によってそれぞれ異なるが，ここでは最もなじみの深い弾性体の構成方程式である Hooke 法則で応力テンソル $\boldsymbol{T}$ とひずみテンソル $\boldsymbol{\Phi}$ との関係をみてみる。

一般に力 F と力による変位 s および力によってなされた仕事 W において，その関係は次式で表される。

$$F=\frac{W}{s} \qquad \cdots\cdots(88)$$

いま物体が力によっても運動をせず，ひずみだけを生ずる場合には，力によってなされた仕事は内部エネルギーとして蓄えられる。またひずみは前述のように9つの成分を持つテンソルで表される。そこで，いま $\Delta\boldsymbol{\Phi}$ だけひずんだときの内部エネルギーを $\Delta\phi$ とすると，Eq.(88)から推測されるように，応力テンソル $\boldsymbol{T}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{T}=\rho\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Phi}}=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial\boldsymbol{\Phi}} \qquad \cdots\cdots(89)$$

ここで ρ は物質の密度で，ここでは ρ＝一定としてある。上式は，応力テンソルは，（単位質量あたりの）変形のエネルギーのひずみテンソルに関するこう配である，ということを表している。

内部エネルギーを表す関数 $\phi(\boldsymbol{\Phi})$ は，物体が等方性材料であるならば方向には無関係でなければならない。また，一般にこの関数形を求めることは不可能である。したがって，関数を級数展開することが考えられるが，いま関数 $\phi(\boldsymbol{\Phi})$ は方向に無関係，すなわち座標の回転に対して不変であるから，テンソル $\boldsymbol{\Phi}$ の不変量 I_1，I_2，I_3 で表せるはずである。展開した結果は次式のとうりである。

$$\rho\phi(\boldsymbol{\Phi})=\rho\phi_0+\alpha I_1+\frac{\lambda+2\mu}{2}I_1^2-2\mu I_2+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(90)$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi}=0$ のとき $\boldsymbol{T}=0$ を仮定すれば $\alpha=0$ となり

$$\boldsymbol{T}=\lambda I_1 E_3+2\mu\boldsymbol{\Phi} \qquad \cdots\cdots(91)$$

となる。ここで E_3 は

$$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。これが Hooke の法則であり，成分表示をすれば

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}=\lambda(e_x+e_y+e_z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+2\mu\begin{pmatrix} e_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & e_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & e_z \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(92)$$

ここで

μ＝せん断弾性係数すなわち G

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

昭和57年6月7日受付
＊名古屋大学工学部化学工学科（〒464 名古屋市千種区不老町）
TEL 052—781—5111

ν＝ポアソン比

E＝引張りおよび圧縮の縦弾性係数

上式の λ および次の λ_1，λ_2，λ_3 は特性方程式の根とは無関係であるから注意を要する。

Hooke の法則は次のようにして考えてもよい。すなわち，等方性を仮定できる弾性体においては，ひずみテンソルと応力テンソルは主軸を共有していると考えられる。そこで $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{T}$ を

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix} e_X & 0 & 0 \\ 0 & e_Y & 0 \\ 0 & 0 & e_Z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(93)$$

とすれば

$$\sigma_X=\lambda_1 e_X+\lambda_2 e_Y+\lambda_3 e_Z \quad \cdots\cdots(94)$$

という関係が考えられる。主軸 Y，Z が σ_X に及ぼす影響は，等方性の仮定から同じと考えられるので $\lambda_2=\lambda_3$ としてよい。よって

$$\begin{aligned}\sigma_X&=\lambda_1 e_X+\lambda_2(e_Y+e_Z)\\ &=(\lambda_1-\lambda_2)e_X+\lambda_2(e_X+e_Y+e_Z)\\ &=2\mu e_X+\lambda(e_X+e_Y+e_Z) \quad \cdots\cdots(94)\end{aligned}$$

ただし，$\lambda_1-\lambda_2=2\mu$，$\lambda_2=\lambda$ とした。ここで $e_X+e_Y+e_Z=I_1$（トレース）であるから

$$\sigma_X=\lambda I_1+2\mu e_X \quad \cdots\cdots(95)$$

σ_Y，σ_Z についても同様に考えれば Eq.(91) を導くことができる。

最後に，たとえば Hooke の法則のように，ひずみと応力の関係を与える構成方程式は一般に偏微分方程式で与えられるために，ひずみとひずみ量（変形量）とが1対1に対応するとは限らない。そこで，このひずみとひずみ量を1対1に対応させるためには，ひずみがある適合条件方程式を満足しなければならないことを付け加えておく必要がある。

まとめ

一般にテンソルは，方向余弦について線形で同次の関係式によって，空間内のそれぞれの方向にベクトルを対応させるものとして定義することができる。これは，ベクトルが方向余弦について線形で同次の関係式によって，空間内のそれぞれの方向にスカラーを対応させるものとして定義されていることを一般化したものと考えられる。たとえば，1.1.2 で述べた応力テンソルについて考えてみるならば，連続体内の任意の一点を通る種々な面積要素については，この面積要素を通して伝えられる応力ベクトルが対応している。これは，力とモーメントのつり合いの考察により面積要素の法線ベクトルと応力ベクトルとの間には，法線ベクトルの方向余弦に関して線形で同次の関係を導くことができるため，連続体内のある一点の応力状態は一つのテンソルすなわちこの点における応力テンソルによって記述することができるのである。また $\boldsymbol{F}$ を力，$\boldsymbol{A}$ を面積とすれば，応力 $\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{A}$ で与えることができるが，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{A}$ はいずれもベクトル量であり，しかもベクトル（行列）の割り算は定義されていないために，これと類似の形式で $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{TA}$ という新しい数学的な記述をしていると考えることもできる。このように考えるならば，応力テンソル $\boldsymbol{T}$ は単位面積当りに働く力を，ひずみテンソル $\boldsymbol{\Phi}$ は単位長さ当りののび（ちぢみ）を表していることになり，テンソルが次元をもっているという考え方が重要であることがわかるであろう。

上記の線形性の定義を数学的に表すと次のようになる。2つの任意ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対して実数を対応させる関数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ があって，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ およびスカラー k に対して

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\\ &\boldsymbol{T}(k\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(96)$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\\ &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(97)$$

を満たすものがあるとする。Eq.(96)は第一のベクトル変数 $\boldsymbol{a}$ に関する線形性を示し，Eq.(97)は第二のベクトル変数 $\boldsymbol{b}$ に関する線形性を示し，この両式を満足する，すなわち双線形性をもつ2つのベクトル変数の関数 $\boldsymbol{T}$ を2階のテンソルという。

テンソルはまた，座標系のとり方によって不変な物理量として定義することもできる。これは，第2章で述べたように，$\boldsymbol{T}$ がテンソルならばテンソルの変換則

$$\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{RTR}^*$$

を満足し，逆にこの変換則を満足する $\boldsymbol{T}$ をテンソルと呼ぶことができることと同値である。この考え方によれば，温度や圧力，密度などのスカラー量は0階のテンソル，速度や力などのベクトル量は1階のテンソル，連続体内の応力やひずみなどは2階のテンソルとなる。

1階や2階のテンソルは座標系のとり方によってその行列の成分は異なるが，本来座標系とは無関係に存在するはずの物理法則を，どのような座標系によっても同様の形式で表すことができ，表現も簡潔となり，現象に対する考え方を統一したり一般化したりするためにも有用な量ということができ，特に連続体力学を記述するには最も適していると考えられる。

連続体の力学を扱う場合，その境界条件が直角座標を用いるよりも極座標や円柱座標，その他の曲線座標を用いる方が便利な場合も多く，もとの直角座標系（x，y，

z）で与えられた方程式を直交曲線座標系（α, β, γ）を用いて比較することは重要なことである。これは，場の各点で（α, β, γ）軸が（x, y, z）軸と一致するまで回転させることによって，その回転マトリクスが求められると考えることによって得られる次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(98)$$

ここで（h_1, h_2, h_3）は（$d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$）に対する拡大率と呼ばれ，次式で求めることができる。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2} \quad \cdots\cdots(99)$$

拡大率は主軸の考え方と同様な方法（あらゆる点で $\begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{pmatrix}$ が対応する点 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ と同じ方向をもつ）により定義されているが，任意の座標系との関係は，回転マトリクスの一般形を用いて

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\frac{\partial x}{\partial \alpha} & h_2\frac{\partial x}{\partial \beta} & h_3\frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ h_1\frac{\partial y}{\partial \alpha} & h_2\frac{\partial y}{\partial \beta} & h_3\frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ h_1\frac{\partial z}{\partial \alpha} & h_2\frac{\partial z}{\partial \gamma} & h_3\frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}d\alpha \\ \frac{1}{h_2}d\beta \\ \frac{1}{h_3}d\gamma \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(100)$$

たとえば $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で表される極座標系（r, θ）を考えてみる。（**Fig. 17**）

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(101)$$

が成り立つから，これより

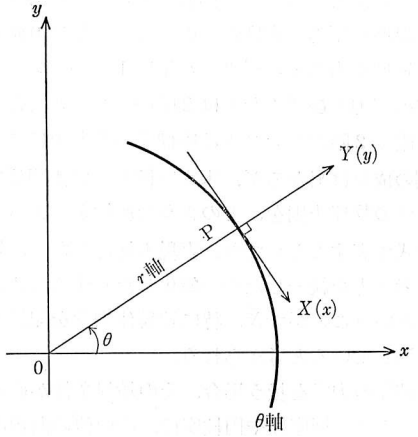

Fig. 17　極座標における拡大率の求め方

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad \cdots\cdots(102)$$

が得られる。

また，$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ の方向を持つときは $\theta = 0$ のときで，これより

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(103)$$

となり，拡大率は $h_1 = 1$, $h_2 = 1/r$ であることがわかる。

円柱座標系で表すならば，上式に z 軸を加えれば

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dz \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(104)$$

となり

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \cdots\cdots(105)$$

より

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1/r, \quad h_3 = 1$$

が得られる。

その他曲線座標でのスカラー場のこう配，曲線座標に関する $\boldsymbol{R}$ の導関数も容易に導くことができ，これらの関係式により，一般の物理現象で必要なスカラー，ベクトルおよびテンソルの関係式を，任意の曲線座標系の場合に決定をすることができる。

一口書評

われわれがテンソルと連続体力学を勉強する際に参考にしたテキストを，われわれの感想を交えて紹介する。

1) S. F. ボルグ（関谷壮訳）「テンソルと連続体力学入門」理工学海外名著シリーズ35，ブレイン図書出版株式会社；われわれのメインテキスト。2～3人で腰をすえて読むには良い。
2) W. フリューゲ（後藤学訳）「テンソル解析と連続体力学」同上シリーズ30；最初に連続体力学を勉強しようとして失敗した本。かなり難解で，数学的興味でしか読めない。
3) 国尾武「固体力学の基礎」培風館；非常にわかりやすく書いてある。独学には最適。
4) 松信八十男「変形と流れの力学」基礎の物理，朝倉書店；基礎からハイレベルな知識まで得られるが，T_{ij} 式記述がやや難解
5) 田代嘉宏「テンソル解析」基礎数学選書23，裳華房；数学的なテンソル代数，テンソル解析の勉強には良い。
6) 安達忠次「ベクトルとテンソル」新数学シリーズ6，培風館；難解な入門書の典型。知識の確認には良い。
7) 石原繁「テンソル・その応用」数学ワンポイント双書11，共立出版；めずらしく入門書らしい入門書として名著である。