

やさしい 粉の数学

誰にでもわかるテンソル (II)

椿 淳一郎* 森 英利*
Jun-ichiro TSUBAKI Hidetoshi MORI

誰にでもわかるテンソル(II)

椿 淳一郎* 森 英利*

Jun-ichiro TSUBAKI Hidetoshi MORI

2.3 対称テンソル

応力テンソル、ひずみテンソルや慣性テンソルなどは、座標系をうまく選んでやると、Eq.(56)に示した \mathbf{T} のような主対角線要素だけが値を持つ対角行列に変換することができる。このような対角行列に変換できるのは対称テンソルの場合だけである。対称テンソルのこののような性質を利用すれば、対称テンソルをいくつかの方法で図解的に表すことができる。

2.3.1 対称テンソル

まず最初に対称テンソルを一般的に定義し、次に対角行列の求め方について説明する。

対角成分が互いに等しいテンソルを対称テンソルと呼ぶ。すなわち、一般にテンソルの成分を

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad \dots \dots (58)$$

とすれば、 $T_{12}=T_{21}$, $T_{13}=T_{31}$, $T_{23}=T_{32}$ なる関係がある。対称テンソルには応力テンソル、ひずみテンソル、慣性テンソルなどが例としてあげられる。この \mathbf{T} をうまい座標系を選んで変換してやれば、次のような主対角線要素だけが値を持つ対角行列に変換することができる。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (59)$$

この主対角線の値 λ_1 , λ_2 , λ_3 は、対称テンソルが対角行列になるような座標系が定まらなくても、もとの座標系のテンソル成分を使って、次の方程式（特性方程式）の根としても与えられる。

$$\lambda^3 - (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots (60)$$

昭和57年6月7日受付

*名古屋大学工学部化学工学科(〒464 名古屋市千種区不老町)

TEL 052-781-5111

このように対称テンソルは必ず対角行列のテンソルである。また、対角行列の主対角線要素だけが値を持つ対角行列は、必ず対称テンソルである。このことは、対称テンソルの性質を利用して、対称テンソルを対角行列に変換する手順を用いて、対角行列の主対角線要素だけが値を持つ対角行列であることを証明することができる。

このように対称テンソルは必ず対角行列のテンソルである。

このように対称テンソルは必ず対角行列のテンソルである。

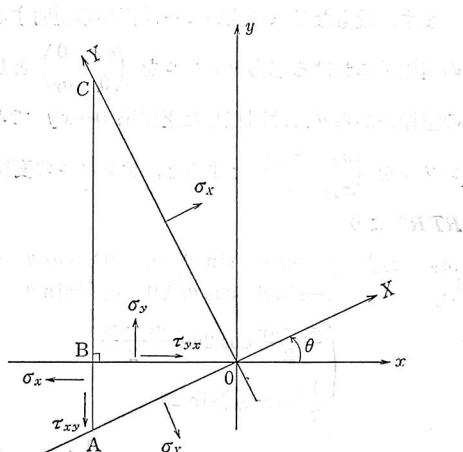


Fig. 10 主軸からみた力のつり合い

主対角線の値 λ_1 , λ_2 , λ_3 をこのテンソルの主値と呼ぶ。また、対称テンソルが対角行列となるような座標系を主軸と呼び、この座標系をここでは O-XY と書いて一般的の座標系 O-xy と区別する。この主軸の座標系 O-XY とともに座標系 O-xy のなす角は、次に述べたとえばモール円のような図解表示によって求めることができる。

以上のこと、2.2.2 で例にあげた応力テンソルで具体的に説明する。2.2.2 では、Eqs.(51), (52) から明らかのように、与えられた応力テンソルの座標系を 30° 回転することによって、応力テンソルはせん断応力 $\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$ の対角行列となり、Fig. 10 に示すように主軸の座標系 O-XY を求めることができた。この対角行列の主対角線の値を Eq.(60) から求めてみる。Eq.(51) の値を Eq.(60) に代入すれば

$$\lambda^2 - (0.2 + 0.4)\lambda + \begin{vmatrix} 0.2 & -0.173 \\ -0.173 & 0.4 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots (61)$$

となり、これを解けば $\lambda_1=0.1$, $\lambda_2=0.5$ を得る。この値は Eq.(52) の値と一致している。

このように、対称テンソルは必ず対角行列のテンソル

に変換できるということは、応力テンソルにおいては、与えられた応力場を圧縮（引張り）応力だけで記述できることを意味し、ひずみテンソルにおいては、ひずみの状態を圧縮（引張り）ひずみだけで記述できることを意味している。

対称テンソルの場合、Eq.(60)の特性方程式で与えられる主値を使うことによって便利な図解表示が可能となる。

2.3.2 モール円

まず、最もなじみの深いモール円から説明する。主軸の座標系における応力テンソルを $\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$ とし、主軸の座標系から θ だけ回転した座標系 $0-xy$ での応力テンソルを $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$ とすると、テンソルの変換則 $\mathbf{T}' = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^*$ より

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad \dots(62)$$

となる。すなわち、主軸の座標系から θ だけ傾いた座標系での応力は、主値 σ_x, σ_y によってそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots(63)$$

で与えられる。これから θ を消去すると、最終的に次式が得られる。

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \quad \dots(64)$$

これは σ と τ を座標軸とするとき円を表し、この円をモール円と呼ぶ。Fig. 11 に示したこのモール円は、対称テンソルであるひずみテンソルや慣性テンソルについても同様にして描くことができる。主軸の座標系の応力テンソルの成分 σ_x, σ_y は、 σ 軸上に与えられ、主応力と呼ばれる。主軸の座標系から θ だけ傾いた $0-xy$ 座標系の (σ_y, τ_{xy}) は、Eq.(63) から明らかなように点 P_1 で与えられる。また、それに対して (σ_x, τ_{xy}) は、 $\sigma_y(\theta) =$

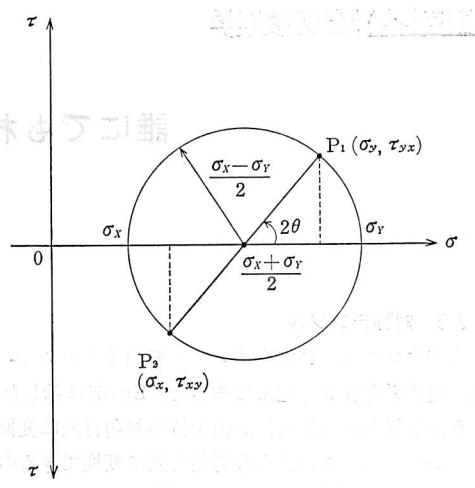


Fig. 11 モール円（2次元応力の場合）

$\sigma_x(\theta + \frac{\pi}{2})$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ であるから、Eq.(63) から明らかのように点 P_1 の対称の点 P_2 で与えられる。したがって一般に、主軸から θ だけ傾いた座標系 $0-xy$ における応力テンソルの成分は点 P_1, P_2 で表される。これまた、点 P_1 が最大主応力面から θ だけ傾いた面に作用している応力を表しているともいえる。

モール円は主応力が与えられなくても描くことができる。いま、ある座標系 $0-xy$ で応力テンソル \mathbf{T} (Fig. 11 の点 P_1, P_2) が与えられたとすると、Fig. 11 から明らかなように

$$\text{モール円の中心} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \quad \dots(65)$$

$$\text{モール円の半径} = \sqrt{\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}^{1/2}$$

$$\text{or. } \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sigma_x \right)^2 + \tau_{xy}^2}^{1/2} \quad \dots(66)$$

となるから、モール円を描くことができる。したがってモール円から、与えられた座標系と主軸とのなす角、主応力とともに読みとることができる。

2.3.3 テンソル 2 次曲面

次に、テンソルの 2 次曲面について説明する。ここでも簡単のため、2 次元の応力テンソルを例にとり説明する。いま応力テンソルを \mathbf{T} とし、物体内に長さが a の線素を考え、その線素の長さを表す法線ベクトルを \mathbf{a} とする。主軸の座標系で考えると、

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots(67)$$

となる。線素に働く力 \mathbf{F} は既に説明したように

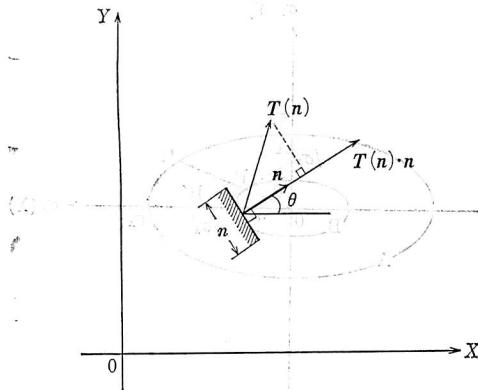


Fig. 12 線素に垂直に働く力のテンソル表示

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sigma_x \cos \theta \\ a\sigma_y \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots \dots (68)$$

となる。次にこの力 \mathbf{F} と線素の長さを表す法線ベクトル a の内積をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} &= (a\sigma_x \cos \theta \ a\sigma_y \sin \theta) \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= a^2(\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad \dots \dots (69)$$

となる。

一方、単位長さの線素を考え、この線素に働く力の法線方向成分を求めてみる。いま線素の長さを表す単位法線ベクトルを n とする

$$n = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots \dots (70)$$

となる。線素に働く力 \mathbf{P} は次式となる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}(n) = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta \\ \sigma_y \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots \dots (71)$$

力 \mathbf{P} の法線方向成分 P_n は、力 \mathbf{P} と単位法線ベクトル n との内積で与えられるから

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = (\sigma_x \cos \theta \ \sigma_y \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \dots \dots (72)$$

したがって、Eqs. (69), (72)より次の関係が得られる。

$$\text{単位線素に働く力の法線方向成分} = \frac{\mathbf{T}(a) \cdot \mathbf{a}}{a^2} \quad \dots \dots (73)$$

ここで、 $\mathbf{T}(a) \cdot \mathbf{a} = 1$ とおくと Eq. (69) より次式が得られる。

$$\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta = \frac{1}{a^2} \quad \dots \dots (74)$$

$\sigma_x, \sigma_y > 0$ ならば、Eq. (74) は Fig. 13 に示すように θ を回転角、 a を動径とした橿円の式となっている。また、

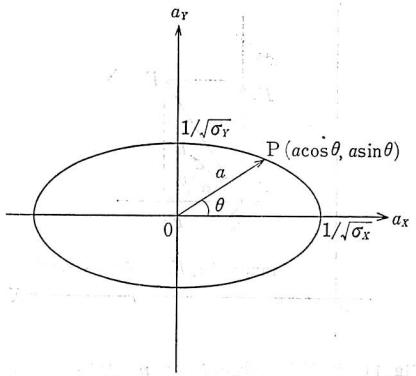


Fig. 13 テンソル 2 次曲面 (2 次元応力の場合)

Eq. (74)の左辺は Eq. (72)と一致しており、単位線素に働く力の法線方向成分になっている。したがって、Fig. 13 に示した橿円の動径 OP は次のような意味を持つことになる。

$$\text{動径 } OP = (\text{主軸から } \theta \text{だけ傾いた単位線})^{-1/2} \quad \dots \dots (75)$$

Eq. (75)から、主軸に垂直な線素 ($\theta=0, \pi/2$) に対しては、動径 OP が $1/\sqrt{\sigma_x}, 1/\sqrt{\sigma_y}$ になることは容易に理解できることと思う。また Eq. (74) は次のようにも書き換えることができる。

$$\frac{a_x^2}{1/\sigma_x} + \frac{a_y^2}{1/\sigma_y} = 1 \quad \dots \dots (76)$$

これまで 2 次元で説明してきたが、3 次元の場合も同様にして、次の橿円体の式を導くことができる。

$$\frac{a_x^2}{1/\sigma_x} + \frac{a_y^2}{1/\sigma_y} + \frac{a_z^2}{1/\sigma_z} = 1 \quad \dots \dots (77)$$

Eq. (77) は、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z > 0$ の場合にのみ橿円体となり、その他の場合は双曲面、放物面となる。したがって、一般にはこれからも含めてテンソル 2 次曲面と呼ぶ。

2.3.4 対称テンソルのもう一つの橿円表示

ここでもやはり 2 次元で説明する。主軸の座標系で単位長さの線素を考え、その単位法線ベクトルを n とする。すなわち $n = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とし、応力テンソルを $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$ とする。Fig. 14 に示すように、線素の単位法線ベクトル n と主軸、線素に働く力 \mathbf{F} と主軸とのなす角をそれぞれ θ, α とする。線素に働く力 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ は

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}(n) \quad \dots \dots (78)$$

で表されるから、 \mathbf{T} と n を代入すると

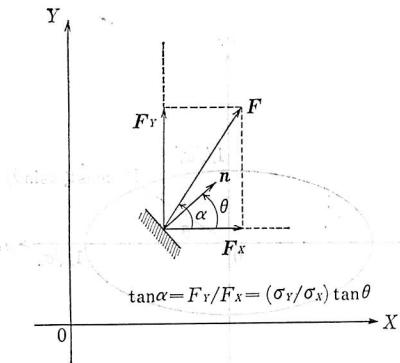


Fig. 14 任意面の法線ベクトル n , 力のベクトル F と主軸との傾き

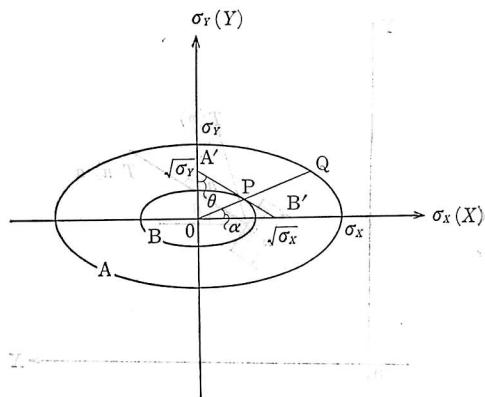


Fig. 16 任意面に働く力を応力楕円から図解的に求め
る方法

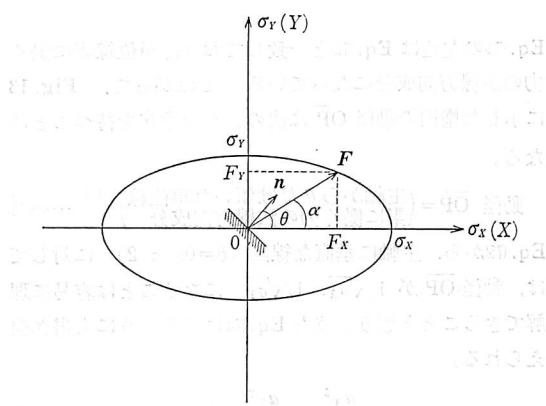


Fig. 15 任意面に働く応力ベクトルの表示法

この場合も學びたように、上記の式を用いて

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots \dots (79)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \sigma_x \cos \theta \\ F_y &= \sigma_y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (80)$$

となり、これから次式が得られる。

$$\frac{F_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{F_y^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \dots \dots (81)$$

これは Fig. 15 に示すような楕円を表しており、図から明らかのように、この楕円によって主軸に対して θ だけ任意に傾いた長さが 1 の線素に働く応力ベクトルそのもの

のを表示することができる。この楕円を応力楕円と呼ぶ。この応力楕円によれば、主軸から θ だけ任意に傾いた線素に働く力（主軸から α だけ傾いている）の主軸方向の成分 F_x , F_y を知ることができるが、 α は次の関係により求めなければならない。

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tan \theta \quad \dots \dots (82)$$

この α と θ の関係は図的に Fig. 16 のようにして求めることも可能である。すなわち、Fig. 15 の楕円 A の内に

$$\frac{F_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{F_y^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \dots \dots (83)$$

で定義される楕円 B を描き、この楕円 B の接線で Y 軸と θ の角をなすもの A'B' を引き、その接点を P とする。O と P を結び、その延長と楕円 A との交点を Q とすれば、OQ が線素に働く力 F を表し、 $\angle QOB'$ が F と主軸 X とのなす角 α を表している。

3 次元の場合、Eq. (81) は

$$\frac{F_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{F_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{F_z^2}{\sigma_z^2} = 1 \quad \dots \dots (84)$$

となり、応力楕円体となる。

ひずみの場合にも同様にひずみ楕円を描くことができ、単位長さの位置ベクトルの変位ベクトルが楕円として表される。