

やさしい 粉の数学

誰にでもわかるテンソル（I）

椿 淳一郎\* 森 英利\*  
Jun-ichiro TSUBAKI Hidetoshi MORI

## 誰にでもわかるテンソル (I)

椿 淳一郎\* 森 英利\*  
Jun-ichiro TSUBAKI Hidetoshi MORI

### はじめに

粉体層の力学を勉強しようとすると、必ず応力テンソルやひずみテンソルが出てくる。そこでテンソルの初步を勉強しようと、いわゆる「入門書」と称している本を買って読み始めると、いきなり  $T_{ij}$  といった繁雑な記号が出てきたり、座標変換の話が出てきて、これこれの式で定義されるものをテンソルと呼ぶと書いてある。かなり辛抱強く出てくる式をフォローしてみても、テンソルというものが何か座標変換と関係があるものらしいということが理解できる程度で、何故テンソルは3行3列の正方行列なのか、ただの正方行列と何が違うのか等々依然としてテンソルというもののイメージがつかめない。そのうち辛抱も限界に達し、せっかく買った本もいつの間にか本棚の片すみで眠ってしまう。こういう体験は、筆者ののみならず少からぬ方々がお持ちではないかと思われる。

筆者らはこういう苦い経験から、1人でダメなら2人がかりでやろうと、ある本<sup>1)</sup>をメインテキストにして1年余りゼミを統けて、ようやくテンソルというもののイメージをつかむことができた。

筆者らはもとより数学が得意なわけでもなく、テンソルについての勉強も浅いので、このような解説記事を書く資格などまったくないが、数学が得意でない者がどのようにテンソルを理解したかを書くことは、苦い体験をお持ちの方々にとって何か参考になるのではないかと思いつかえて筆をとった。

ここでは表題もあるように、テンソルをわかりやすく書いたもので、テンソルと付合う上で知っておくべき相手の「人柄」を一とおり述べたものである。テンソルを頼もしい味方にするためにには、やはり「入門書」から改めて勉強していただきたいが、相手の人となりがわかっているれば、 $[T_{ij}]$  式の記述にも何とかついてゆけるもの

昭和57年6月7日受付

\*名古屋大学工学部化学工学科 (〒464 名古屋市千種区不老町)  
TEL 052-781-5111

と思う。

以下は、「入門書」と称している難解なテキストを勉強するための手引きとして、読んでいただければ幸いである。

### 1. ベクトルとベクトルをつなぐテンソル

テンソルの持つ機能の中で最も重要なものは、Fig. 1(a)に示すようにベクトルとベクトルをつなぐという性質である。具体例は後に詳しく述べるが、なじみの深い応力テンソルを例にとってみると、応力テンソルは、物体内の任意面の面積と方向を表す法線ベクトルとその面に働く力のベクトルを関係付けている。その関係は、力のつり合いから任意面に働く力を求める場合に3元1次の連立方程式が出てくることからわかるように、法線ベクトルと力のベクトルが応力テンソルによって線形に結合されている。

この例からわかるように、テンソルはベクトルとベクトルを線形に結合するという重要な性質を持っている。また、結合されるそれぞれのベクトルは一般に異なる次元を持つため、テンソルも一般には次元を持つ。テンソルには様々なテンソルがあるが、Fig. 1(b)にテンソルのいくつかの例と、そのテンソルによって結び付けられるベクトルを列挙した。

以下に、粉体層の力学でなじみの深い応力テンソル、ひずみテンソル等を具体例にとりながら、テンソルのこの重要な性質について述べる。

#### 1.1 ベクトル関数としてのテンソル

##### 1.1.1 方向余弦テンソル

テンソルのうちで最も簡単なものは、ベクトルの回転に関する方向余弦テンソルである。 $0-xy$  座標系において、ベクトル  $a$  を回転してベクトル  $b$  に変換する場合、次式(1)が成立する。

$$b = R^* a \quad \dots \dots (1)$$

ただし  $|a| = |b|$

ここに  $R^*$  を方向余弦テンソルと呼び、 $R^*$  は回転マトリクス  $R$  の転置行列である。要素で表せば次式のよう

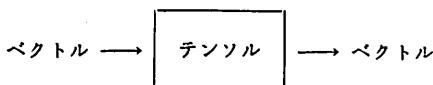


Fig. 1(a) ベクトルとベクトルをつなぐテンソル

ベクトル	テンソル	ベクトル
ベクトル $a$	方向余弦テンソル $R$	ベクトル $b$
法線ベクトル $n$	応力テンソル $T$	面に作用する力 $F$
位置ベクトル $r$	ひずみテンソル $\epsilon$	変位ベクトル $u$
位置ベクトル $r$	回転テンソル $\Omega$	変位ベクトル $u$
回転ベクトル $\omega$	慣性テンソル $I$	角運動量 $L$
電場の強さ $E$	誘電率テンソル $\epsilon_0$	誘電束密度 $D$

Fig. 1(b) いろいろなテンソルと対応するベクトル

になる。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (2)$$

たとえば Fig. 2 に示すように、  $a=(2, 1)$  のベクトルを  $30^\circ$ だけ回転したとすれば、  $b$  は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (3)$$

となる。ここで注意すべきことは、同一の座標系内において  $a$ ,  $b$  を見ていることであり、もし座標系  $0-xy$  を原点のまわりに  $\theta$ だけ回転して  $0-x'y'$  に変換する座標の回転の場合、 $a$  は座標  $0-x'y'$  においては、次式で与えられる  $a'$  で表される。

$$a' = Ra \quad \dots \dots (4)$$

これを要素で表せば

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (5)$$

### 1.1.2 応力テンソル

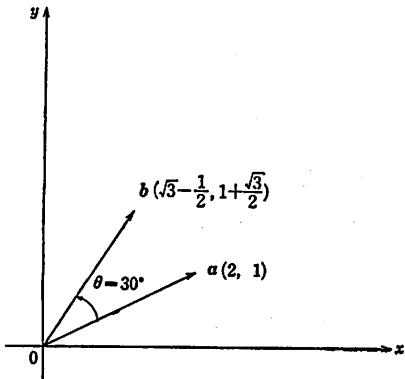


Fig. 2 ベクトルを原点まわりに回転

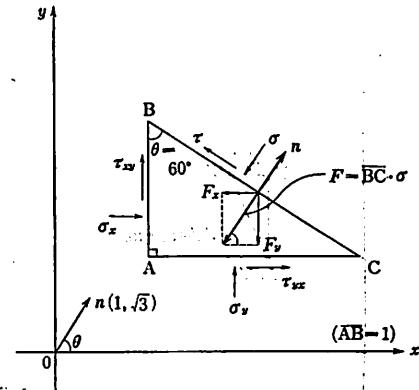


Fig. 3 三角形要素の力のつり合い（2次元応力の場合）

応力テンソル  $T$  は、任意面積要素の面積と方向を表す法線ベクトル  $n$  と、この要素に作用する力  $F$  をつなぐものである。いま、簡単のために Fig. 3 に示す平面内の線分  $\overline{BC}$  に働く力  $|F|$  を求めてみる。まず線分  $\overline{BC}$  に作用する応力  $\sigma$ ,  $\tau$  は、Fig. 3 において、力のつり合いとモーメントのつり合いから

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad \dots \dots (6)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \quad \dots \dots (7)$$

で与えられる。したがって線分  $\overline{BC}$  に働く力  $|F|$  は次式で求められる。

$$|F| = \overline{BC} \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad \dots \dots (8)$$

ここで  $\sigma_x = 0.2 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_y = 0.4 \text{ kPa}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.173 \text{ kPa}$ ,  $\theta = 60^\circ$  として、Eqs. (6)~(8) から実際に計算すると

$$\sigma = 0.5 \text{ kPa}$$

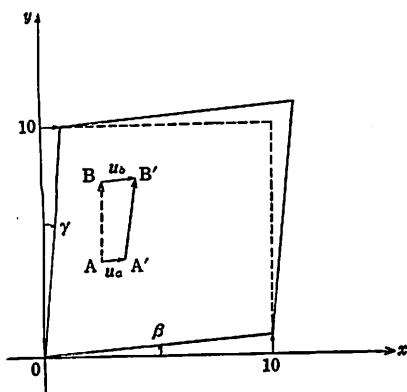


Fig. 4(a) ひずみによって移動した位置ベクトル

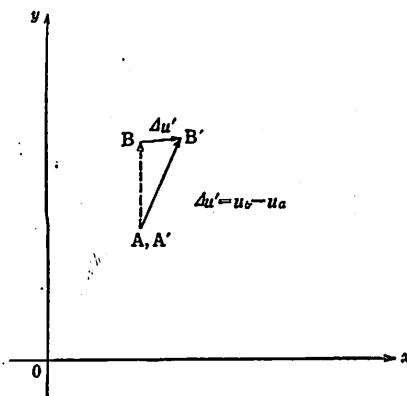


Fig. 4(b) 位置ベクトルとひずみによる変位ベクトルとの関係

$$\tau = 0 \text{ kPa}$$

$$|F| = 1.0 \text{ kN}$$

が得られる。(z 方向の幅 = 1 m とする)

また線分 BC に働く力 F は、応力テンソル T と法線ベクトル n から次式によって求められる。

$$F = T(n) \quad \dots \dots (9)$$

要素で表せば

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad \dots \dots (10)$$

となる。これに具体的な数値を代入すれば

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.173 \\ 0.173 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

したがって

$$|F| = 1.0 \text{ kN}$$

となり、力のつり合いから求めた結果が容易に求められる。

ここでは、力 F の大きさだけで比較をしたが、Fig. 3 から明らかなように、力のつり合いから求めた F も応力テンソルから求めた F もその成分表示が異なるだけであつたく一致する。

$$F = 2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (11)$$

### 1.1.3 ひずみテンソル

粉体層の力学で応力テンソルの次によくお目にかかるのは、ひずみテンソルである。ひずみテンソルは、位置ベクトルと変位ベクトルをつなぐものである。ここで扱うひずみは、大ひずみではなく微小ひずみを対象としている。ここでも簡単のために 2 次元で説明する。いま、Fig. 4(a) に示した破線の正方形が、ひずみを受けて実線の平行四辺形になった場合を考える。微小ひずみを考えているので、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yx}$  は次式で定義される。

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = (\tan \gamma + \tan \beta)/2 = (\gamma + \beta)/2 \quad \dots \dots (12)$$

いま、正方形の一辺の長さを 10 とし、ひずみ前の任意の点 P(x, y) がひずみ後 P'(x', y') の座標に移ったとすると、P'(x', y') は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{\Delta x}{10} y \\ y' &= y + \frac{\Delta y}{10} x \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (13)$$

また、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yx}$  は Eq. (12) から明らかのように次式で与えられる。

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x + \Delta y}{10} \right) \quad \dots \dots (14)$$

いま、 $\Delta x = \Delta y = 0.1$  とし、点 A(5, 5), B(5, 6) がひずみを受けて点 A', B' に移行するとすれば、Eq. (13) より

$$A' = (5.05, 5.05), B' = (5.06, 6.05) \quad \dots \dots (15)$$

が得られる。したがって線分 AB, A'B' の位置ベクトル  $r$ ,  $r'$  はそれぞれ次のようになる。

$$\overrightarrow{AB} = r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (16)$$

$$\overrightarrow{A'B'} = r' = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (17)$$

よって、 $r$  の変位ベクトル  $\Delta u'$  は

$$\Delta u' = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB} = r' - r = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (18)$$

となる。

一方、変位ベクトルと元の位置ベクトルとの関係をテソルで表すと

$$\Delta u' = \Phi(r) \quad \dots \dots (19)$$

となり、ここで  $\Phi$  をひずみテンソルと呼ぶ。要素で示

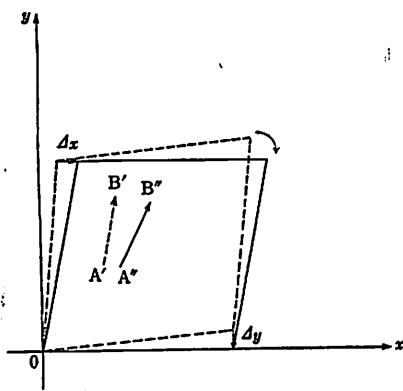
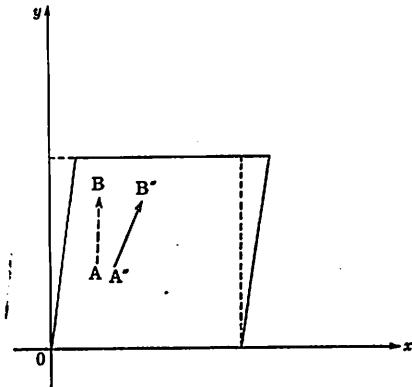


Fig. 5(a) 回転によって移動した位置ベクトル



**Fig. 6(a)** 変形によって移動した位置ベクトル

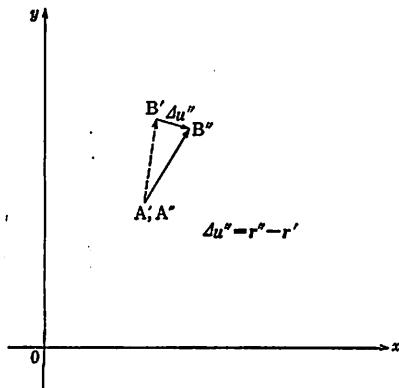


Fig. 5(b) 位置ベクトルと回転による変位ベクトルとの関係

せば次式となる。

$$\begin{pmatrix} \Delta u_x' \\ \Delta u_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & e_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (20)$$

いま、 $x$ ,  $y$  方向にはのび(縮み)がないので、 $e_x = e_y = 0$ 、 $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  は Eq. (14) より 0.01 となる。したがって、Fig. 4 の例の変位ベクトル  $4u$  は次式で与えられ、Eq. (18) と同じ結果を得ることができる。

$$\begin{pmatrix} \Delta u_s \\ \Delta u_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (21)$$

#### 1.1.4 回転テンソル

位置ベクトルと変位ベクトルをつなぐもう1つのテンソルとして、回転テンソルがある。1.1.3でひずみを受けた正方形（破線の平行四辺形）が、Fig. 5(a)のように（実線の平行四辺形に）回転したとする。回転テンソル  $\Omega$  の対角要素は0であり、要素  $\omega_{xy}$ ,  $\omega_{yx}$  は次式で与

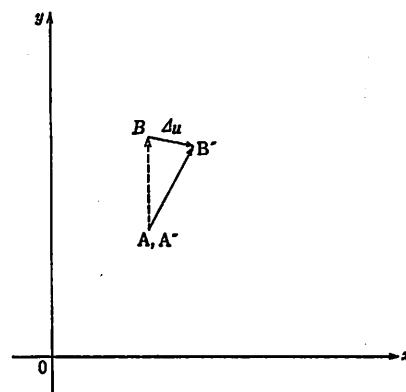


Fig. 6(b) 位置ベクトルと変形による変位ベクトルとの関係

えられる。

$$\omega_{xy} = -\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x - \Delta y}{10} \right) \quad \dots \dots \dots (22)$$

回転前任意の点の座標を  $P(x, y)$ , 回転後の座標を  $P'(x', y')$  とすれば,  $P'(x', y')$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} x' = x + \frac{4x}{10} y \\ y' = y + \frac{4y}{10} x \end{array} \right\} \quad \dots\dots(23)$$

いま、 $\Delta x = -\Delta y = 0.1$  として、点 A'(5.05, 5.05), B'(5.06, 6.05) が回転して点 A'', B'' にそれぞれ移行したとする。Eq. 43 より

$$A'' = (5.1005, 4.9995), B'' = (5.1205, 5.9994)$$

となる。すなわち、線分 A''B'' の位置ベクトル  $r''$  は



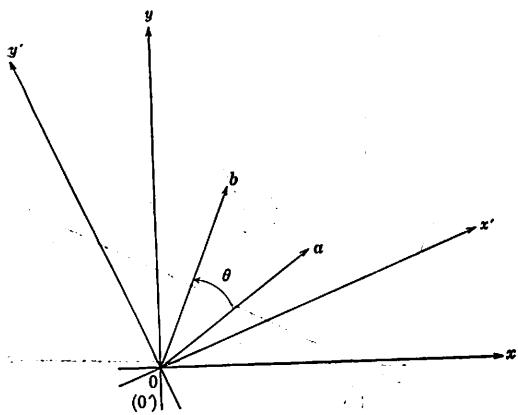


Fig. 7 座標軸の回転と方向余弦テンソル

以下では、ある座標系のテンソルを他の座標系のテンソルに変換する変換則について述べるとともに、いくつかのテンソルによってその変換則を検証する。また、応力テンソル、ひずみテンソルのような対称テンソルは、モール円のようないくつかの便利な図解表示が可能なので、それについても解説を加える。

### 2.1 テンソルの変換則

ある直交座標 \$0-xy\$ 系におけるテンソルを \$T\$, \$0-xy\$ 系に対して \$\theta\$だけ傾いた \$0'-x'y'\$ 系におけるそれを \$T'\$ とすれば、\$T\$ と \$T'\$ の間には

$$T' = RTR^* \quad \dots\dots(39)$$

という関係がある。例えば応力テンソルを考えると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots(40)$$

が得られる。この関係をテンソルの変換則と呼び、これは極座標、球面座標等や一般の直交曲線座標系においても成立する。また逆に、この変換則を満足すれば \$T\$ はテンソルであるということもできる。

**2.2 どの座標軸で定義してもテンソルの役割は同じ**  
テンソルの役割が座標軸のとり方によらないことを、  
2つのテンソルを実例としてとり上げて説明する。

#### 2.2.1 方向余弦テンソル

ベクトル \$a\$ を \$b\$ に角度 \$\theta\$だけ回転するときの方向余弦テンソルは、Fig. 7 から明らかなように、座標系は \$0-xy\$ でも \$0'-x'y'\$ でも同じテンソルになる。

#### 2.2.2 応力テンソル

Fig. 8 に示すように、座標系 \$0-xy\$ と \$\theta\$だけ傾いた

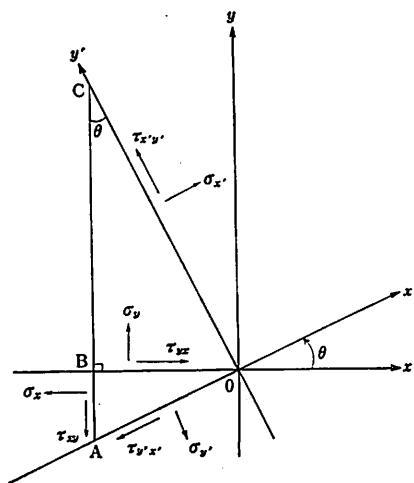


Fig. 8 三角形要素の力のつり合いと座標軸の回転

座標系 \$0-x'y'\$ での応力テンソルの成分 \$\sigma\_x', \sigma\_y', \tau\_{x'y'}\$ (\$=\tau\_{y'x}\$) を、\$\triangle OAB, \triangle OBC\$ の力のつり合いから求め、テンソルの変換則 Eqs. (39) または(40)と一致するかどうかを確かめてみる。

\$\overline{OA}=1\$ として \$\triangle OAB\$ での力のつり合いをとると  
\$x\$ 方向

$$-\sigma_x \sin \theta + \tau_{yx} \cos \theta - \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta = 0 \quad \dots\dots(41)$$

\$y\$ 方向

$$\sigma_y \cos \theta - \tau_{xy} \sin \theta - \tau_{yx} \sin \theta - \sigma_x \cos \theta = 0 \quad \dots\dots(42)$$

\$\triangle OBC\$ についても同様に、

\$x\$ 方向

$$-\sigma_x \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \tau_{yx} \cos \theta - \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_x \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = 0 \quad \dots\dots(43)$$

\$y\$ 方向

$$-\sigma_y \cos \theta - \tau_{xy} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \tau_{x'y'} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sigma_x \cos \theta = 0 \quad \dots\dots(44)$$

またモーメントのつり合いより

$$\tau_{xy} = \tau_{y'x}, \quad \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} \quad \dots\dots(45)$$

Eqs. (41), (42), (45)より

$$\tau_{x'y'} = \sin \theta \cos \theta (\sigma_y - \sigma_x) + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \dots\dots(46)$$

$$\sigma_y' = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots(47)$$

また、Eqs. (43), (44), (45)より

$$\sigma_x' = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots(48)$$

が得られる。ここで \$0-xy\$ 座標系の応力テンソルを \$T\$, \$0-x'y'\$ 座標系のそれを \$T'\$ とすれば

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad T' = \begin{pmatrix} \sigma_x' & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_y' \end{pmatrix} \quad \dots\dots(49)$$