

2.3 強度

椿 淳一郎*, 松岡 元**
Jun-ichiro TSUBAKI Hajime MATSUOKA

2.3.1 圧縮と引張り

粒子層の場合も、材料の強度試験と同様の圧縮試験、引張り試験が行われる。しかし粒子層が構造材として用いられることはまれで、原料あるいは製品としてハンドリングされる場合がほとんどである。そのため、圧縮や引張り試験も強度そのものを探ることよりも、ハンドリングする上で必要な粒子層の力学的性質を求める目的として行われる。

粒子層は粒子の集りであるから、接触点の数と接触点における力学的状態、性質が、粒子層の強度、力学的性質を決める重要な因子となる。そこで以下では、接触点の数(空隙率)と、接触点に働く力の2つの視点から、圧縮と引張り試験をながめ、両試験より得られる粒子層の力学的性質についても言及する。

(1) 圧縮試験

圧縮試験の方法にはいくつかあるが、広く行われている方法は図2.3.1に示すような、円筒容器中の粒子層をピストンで圧縮する方法である。この方法では、

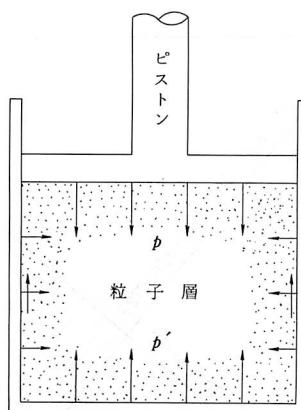


図2.3.1 圧縮試験概念図

昭和60年2月18日受付

* 名古屋大工学部化学工学科(〒464名古屋市千種区不老町)

** 名古屋工業大学工学部社会開発工学科(〒466名古屋市昭和区御器所町)

側壁の摩擦力のために、底面に伝達される圧縮応力 p' は、加えている圧縮応力 p よりも小さくなる。そのため実際の試験では、粒子層の厚さを容器径に比べて十分小さくとり、側壁に滑沢剤を塗布するなどして、できるだけ $p=p'$ に近い状態、即ち層全体に渡って最大主応力軸が圧縮の方向に一致するように工夫されている。従ってここでも側壁の摩擦は無視して、 $p=p'$ として話を進める。

圧縮試験の結果は、図2.3.2⁴⁾に示すように、一般に圧縮応力 p と空隙率 ε の関係で整理され、これまで、数多くの実験式が提案されているが、扱い易いということと、接触点に働く圧縮力を推算できるという点で、次の実験式が便利である。

$$p = k_1 \exp(-\varepsilon/c) \quad (2.3.1)$$

ここで、 k_1 、 c は実験定数である。

均一径の球をランダムに充てんした粒子層においては、粒子接触点に働く力と粒子層に作用する応力の間

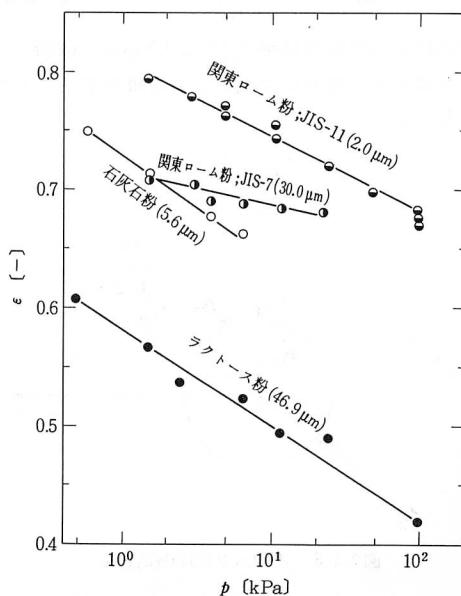


図2.3.2 粒子層空隙率と圧縮応力

に、次の関係式^{*}が成立することが、長尾¹⁾、金谷²⁾によって示されている。

$$\sigma_{ij} = \frac{1 - \epsilon}{\pi} k \frac{P_{ij}}{D_p^2} \quad (2.3.2)$$

ここで、 k は配位数、 D_p は粒径である。この式は図2.3.3に示すように、1軸方向の接触点に働く力の成分 P_{11} 、 P_{12} 、 P_{13} が、1軸に垂直な平面に作用する応力成分 σ_{11} 、 σ_{12} 、 σ_{13} から求められることを示している。

配位数 k と空隙率 ϵ の関係式は、いくつか提案されているが、その中で最も簡単な $k\epsilon = \pi$ を用いると、式(2.3.2)は、次式となる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{P_{ij}}{D_p^2} \quad (2.3.3)$$

式(2.3.2)の空隙率関数 $(1 - \epsilon)/\epsilon$ を、指數関数で近似できれば、実験式(2.3.1)を解析する上で便利である。そこで $(1 - \epsilon)/\epsilon$ の値を片対数紙上にプロットしてみると、図2.3.4に示すように、 $10 \exp(-4.5\epsilon)$ でよく近似できることがわかる。これより式(2.3.3)は次式となる。

$$\sigma_{ij} = 10 \exp(-4.5\epsilon) \frac{P_{ij}}{D_p^2} \quad (2.3.4)$$

ここでは、圧縮応力を考えているので、図2.3.3において1軸を最大主応力軸(圧縮方向)にとれば、 $\sigma_{11} = p$ 、 $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ 、 $P_{11} = P$ 、 $P_{12} = P_{13} = 0$ となり、一般式(2.3.4)は、圧縮応力 p と接触点に働く力 P の関係式となる。

$$p = 10 \exp(-4.5\epsilon) \frac{P}{D_p^2} \quad (2.3.5)$$

この式によって試験結果式(2.3.1)から、例題2.3.1に示すように、接触点に働く力 P を推算することが可能となる。

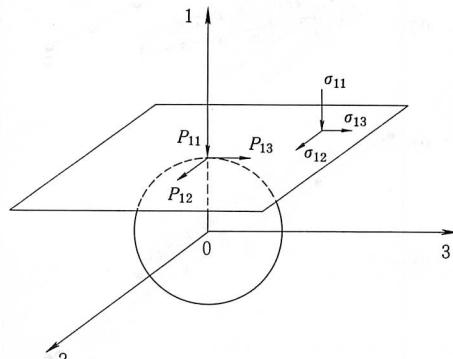


図2.3.3 式(2.3.2)の物理的意味

*) 式の詳しい誘導については文献3)を参照されたい。

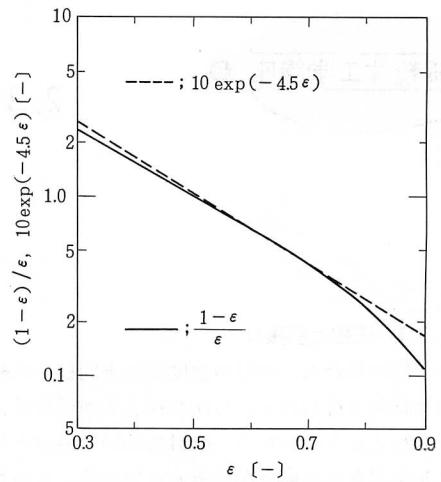


図2.3.4 空隙率関数の近似式

例題2.3.1 (1)式(2.3.1)と式(2.3.5)より、圧縮応力 p から、接触点に働く力 P を求める式を誘導せよ。(2)平均径2.0 μmの関東ローム粉(JIS 11種)の圧縮試験をした所、圧縮応力が1~100 kPaの範囲で、 $c = 0.0272$ 、 $k_1 = 8.80 \times 10^{12}$ kPaという値を得た。(1)で誘導した式を用いて p と P の関係を図示せよ。

$$(解) (1) P = 0.1 D_p^2 k_1^{4.5c} p^{1-4.5c} \quad (2.3.6)$$

$$(2) P = 1.54 \times 10^{-11} p^{0.878} \quad (\text{図2.3.5})$$

圧縮応力 p を増大すると、空隙率 ϵ は減少し層内の接触点数は増大する。従って圧縮力の増大分は、増加した接触点と接触点に働く圧縮力の増大によって伝達

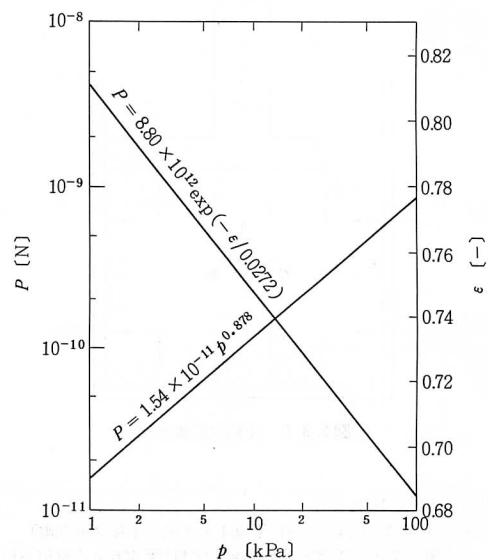


図2.3.5 圧縮応力と接触点に働く圧縮力

2.3 強度

されることになる。いま、圧縮応力が p_0 で空隙率が ϵ_0 の粒子層を圧縮して、空隙率を ϵ_1 まで下げるこことを考へる。もし、接触点に働く力が圧縮応力によらず一定とすると、式(2.3.5)から明らかなように、空隙率は傾き $-1/4.5$ の直線に沿って減少し、圧縮応力が p_1' まで増大した所で空隙率は ϵ_1 になる。(図 2.3.6 参照)しかし実際には、空隙率は式(2.3.1)より明らかなように傾き $-c$ の直線に沿って減少し、圧縮応力が p_1 まで増大した所で空隙率は ϵ_1 となる。したがって、 $p_1' - p_0$ は接触点数の増大(空隙率の減少)によって伝達される圧縮応力增加分を表わし、 $p_1 - p_0$ は接触点に働く力の増大によって伝達される圧縮応力の増大分を表わすことになる。また、次の比

$$\frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1' - \ln p_0} = \frac{1}{4.5c} \quad (2.3.7)$$

によって、空隙率を $\Delta\epsilon$ だけ減少させるのに要した圧縮力の増加割合は、接触点に働く力を一定にして圧縮した場合の圧縮応力増加割合の何倍になるかを表わすことができる。例題 2.3.1 の例では、この比の値が 8.2 となる^{3,4)}。表 2.3.1 に図 2.3.2 に示した粉体の値を示したが、他の粉体においても 6 以上となるので、式(2.3.6)から明らかなように、接触点に働く力 P は圧縮応力 p の $0.8 \sim 1.0$ 乗に比例して増大することになる。このことが、次の引張り試験の項で説明するように、圧縮によって粒子層が「締め固まる」原因である。

圧縮試験は粉体の流動性(流れ易さ)を評価する目的で行われることが多い。そして、流動性は式(2.3.1)の

表 2.3.1⁴⁾ $(4.5c)^{-1}$, $(4.5b)^{-1}$ の実測例

	$(4.5c)^{-1}[-]$	$(4.5b)^{-1}[-]$
関東ローム粉; JIS-11(2.0 μm)	8.2	5.3
関東ローム粉; JIS-7(30.0 μm)	19	6.2
石灰石粉(5.6 μm)	5.9	3.8
ラクトース粉(46.9 μm)	6.4	4.0

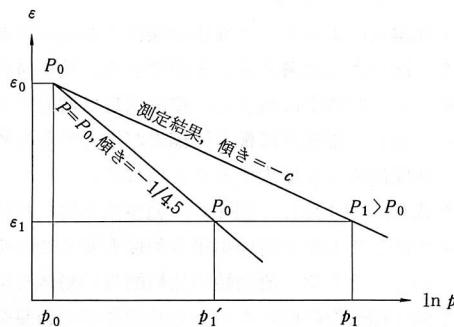


図 2.3.6 圧縮試験結果の解析

c の値が小さい(つまりにくい)程良くなる。これは、粒子表面が滑らかで摩擦抵抗も小さく、付着力も小さい流れ易い粒子においては、粒子を容器に充てんする時に既に粒子自重によって、かなり密で安定な充てん構造をとってしまい、少々圧縮応力を増大しても充てん構造が大きく変化(空隙率が減少)することはないが、摩擦抵抗や付着力の大きな流れにくい粒子の場合は、粒子自重だけでは密な充てん構造をとりえず、圧縮応力に応じた様々な充てん構造(空隙率)をとるからである。

(2) 引張り試験

粒子層の引張り試験は、図 2.3.7 に示す 2 分割セルによって行われる。2 分割セルには、水平引張りと垂直引張りの 2 つのタイプがある。測定手順はいずれのタイプにおいても、まず試料粉体をセルに充てんし、適当な圧縮応力で粒子層を予備圧縮し、空隙率を調整する。その後、可動セルを粒子層が破断するまで引張り、その時の最大引張り応力を粒子層の引張り破壊強度とする。水平引張りの場合、可動セルはボールベアリングの上に置かれるか、吊り下げられ、可動セルを引張る際の抵抗ができるだけ小さくなるよう工夫されている。

粒子層の引張り強度 σ_z は、一般に図 2.3.8⁴⁾ に示すように空隙率 ϵ によって整理され、次の実験式によっ

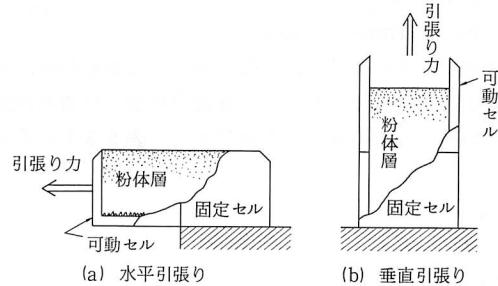


図 2.3.7 引張り試験機概念図

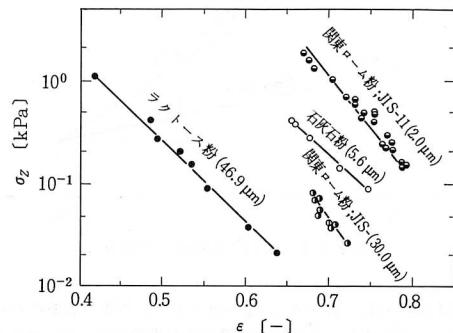


図 2.3.8 粒子層引張り強度と空隙率

て関係づけられている。

$$\sigma_z = k_2 \exp(-\varepsilon/b) \quad (2.3.8)$$

ここで、 k_2, b は実験定数である。式(2.3.8)は、式(2.3.1)と同じ指數関数であるため、引張り試験結果の解析にも式(2.3.2)*が有効である。図2.3.3において $\sigma_{11} = \sigma_z, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, P_{11} = H, P_{12} = P_{13} = 0$ とすれば、引張り試験に式(2.3.4)が適用でき、次のように書き改められる。

$$\sigma_z = 10 \exp(-4.5\varepsilon) \frac{H}{D_p^2} \quad (2.3.9)$$

ここで、 H は接触点に働く付着力である。いま、図2.3.9に示すように、空隙率が ε_0 で引張り強度が σ_{z0} で接触点に働く付着力が H_0 の粒子層を、空隙率 ε_1 まで圧縮した時の引張り強度について考えてみる。空隙率が ε_0 から ε_1 まで減少しても、接触点に働く付着力は H_0 のままで一定とすると、式(2.3.9)から明らかのように、引張り強度は図2.3.9において傾き-4.5の直線に沿って σ_{z0} から σ_{z1}' まで増大する。つまり、 $\sigma_{z1}' - \sigma_{z0}$ は空隙率の減少(接触点数の増大)のみによる、引張り強度の増大を表わしている。それに対して、実測値では σ_{z0} から σ_{z1} まで増大しているので、 $\sigma_{z1} - \sigma_{z1}'$ は接触点に働く付着力の増大による引張り強度の増大を表わしていることになる。したがって圧縮試験の場合と同様に、

$$\frac{\ln \sigma_{z1} - \ln \sigma_{z0}}{\ln \sigma_{z1}' - \ln \sigma_{z0}} = \frac{1}{4.5b} \quad (2.3.10)$$

を求ることによって、引張り強さの増加割合を、接触点数の増加によるものと、接触点に働く付着力の増大に分離して評価することができる。表2.3.1にその

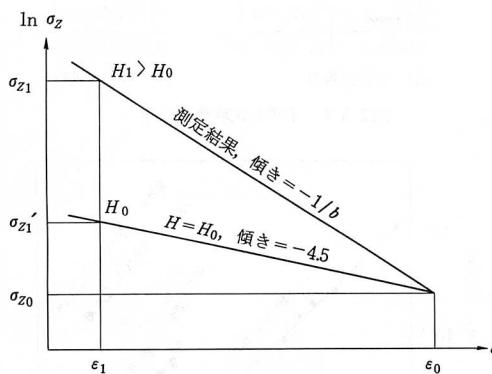


図2.3.9 引張り試験結果の解析

*) 式(2.3.2)は、 $\sigma_{ij} = \sigma_z, P_{ij} = H$ として、引張り破断に対してRumpf⁵⁾によって最初に誘導された理論式で、Rumpf式とも呼ばれている。

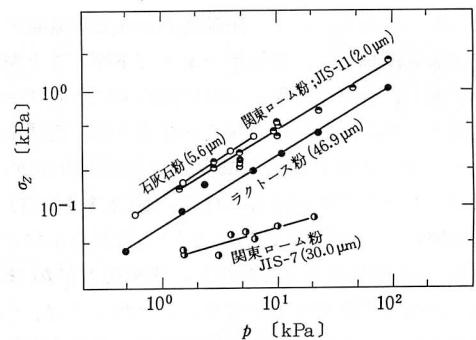


図2.3.10 粒子層引張り強度と予備圧縮応力

1例を示したように多くの粉体において、 $(4.5b)^{-1}$ の値は2から8となり^{3,4)}、引張り試験の場合も接触点に働く力が重要な役割を果していることがわかる。

次に、接触点に働く付着力 H が空隙率 ε の減少とともに増大する原因について考えてみる。粒子層の空隙率は圧縮操作によって調整されているから、引張り強度 σ_z は圧縮応力 p によっても整理され、図2.3.10の例から明らかのように、次の実験式によって整理される。

$$\sigma_z = k_3 p^m \quad (2.3.11)$$

ここで、 k_3, m は実験定数である。式(2.3.11)の σ_z, p を式(2.3.3)によって、接触点に働く力 H, P にすると、

$$H = k_3 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{m-1} D_p^{2(m-1)} P^m \quad (2.3.12)$$

の関係式を得る。ここで、 $\{(1-\varepsilon)/\varepsilon\}^{m-1} = 1.0$ と近似すると、接触点に働く付着力 H は圧縮力 P の関数として、次式で与えられる。

$$H = k_3 \frac{P^m}{D_p^{2(m-1)}} \quad (2.3.13)$$

式(2.3.13)を式(2.3.3)に代入すると、引張り強度に関する半理論式として次式を得る。

$$\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} k_3 \left(\frac{P}{D_p^2} \right)^m \quad (2.3.14)$$

この半理論式によって、予備圧縮操作と引張り強度の関係を、次のように考えることができる。粒子層を予備圧縮すれば空隙率は減少し、接触点数は増大するが、それにも増して接触点に働く圧縮力が増大するため、引張り強度は著しく増大することになる。

また式(2.3.14)は、空隙率の調整法が異なれば、空隙率が同じでも粒子層の引張り強度も変ることを示唆している。そこで、流動性の比較的良い粉体を用いて、予備圧縮操作の前にあらかじめ空隙率の調整を行ってから、引張り試験を行うと、図2.3.11⁶⁾に示すよ

2.3 強度

成形時の圧縮応力、空隙率と成形体の強度の関係も、粒子層の引張り強度と同じ手法によって解析することができる⁷⁾。

〈以上 椿〉

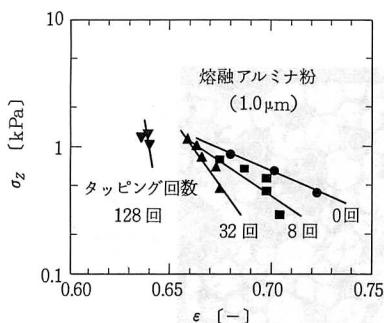


図 2.3.11 引張り強度に及ぼすタッピングの影響

うに、空隙率が同じでもタッピング回数によって異なる引張り強度を示す。

例題 2.3.2 例題 2.3.1 の粉体試料を引張り試験した所、 $b = 0.0422$, $k_z = 1.99 \times 10^7 \text{ kPa}$, $k_3 = 1.23 \times 10^3 \text{ kPa}^{1-m}$, $m = 0.597$ という結果を得た。これらの値を用いて、1kPa と 10kPa で予備圧縮した粒子層の引張り強度を比較し、接触点に働く圧縮力の増加による引張り強度の増大割合と、空隙率減少(接触点数増加)による引張り強度増加割合を求めよ。

(解) 予備圧縮応力が 1kPa, 10kPa の物理量を添字 1, 10 で区別すると、引張り強度の比 σ_{z10}/σ_{z1} は式 (2.3.14) より次式で求められる。

$$\frac{\sigma_{z10}}{\sigma_{z1}} = \frac{1/\epsilon_{10} - 1}{1/\epsilon_1 - 1} \left(\frac{P_{10}}{P_1} \right)^m \quad (2.3.15)$$

σ_z の値は式 (2.3.11), ϵ の値は式 (2.3.1), P の値は式 (2.3.6) 式よりそれぞれ求めることができ、 $\sigma_{z1} = 89.7 \text{ kPa}$, $\sigma_{z10} = 399 \text{ kPa}$, $\epsilon_1 = 0.811$, $\epsilon_{10} = 0.748$, $P_1 = 1.54 \times 10^{-8} \text{ N}$, $P_{10} = 1.16 \times 10^{-7} \text{ N}$ という値を得る。

従って引張り強度の増加割合は、

$$\sigma_{z10}/\sigma_{z1} = 4.4$$

そのうち、接触点数の増加による分は、

$$\frac{1/\epsilon_{10} - 1}{1/\epsilon_1 - 1} = 14$$

接触点に働く付着力増大による分は、次のようになる。

$$(P_{10}/P_1)^m = 3.3$$

数 10 μm 以下の微粉体においては、とりあつかいを容易にするため顆粒やペレットに圧縮成形されることが多い。このような場合には、圧縮成形体の強度そのものが問題となり、圧壊試験によってその強度が測定される。圧縮試験においては、圧縮応力が加えられるが、圧縮成形体内部では引張り応力として働くため、

2.3.2 せん断強度

(1) 粉粒体のせん断強度の源

粉粒体は、固体でも液体でも気体でもない、粒子(固相)と他の相(空隙)から成る多相系材料であり、大きさ・形の異なる無数の粒子の不規則な集合体と考えられる。このような多相系材料の理論的取扱いは一般にむづかしいが、粒子間の力学挙動に対する支配法則の 1 つが摩擦法則であることは確かなようである。図

2.3.12 は、粉粒体の 2 次元モデルとして用いられた光弾性材料の丸棒(直径 6 および 10 mm, 長さ 20 mm)の積層体の一面せん断試験中の写真を示したものである。光弾性縞の数の多い接点ほど、大きな粒子間力が伝達されていることを表わしている。この写真より、巨視的に測定されるせん断力は、微視的に見ればせん断面に沿った個々の粒子に伝達される粒子間力の水平方向成分の和として表現されることが理解されよう。したがって、図 2.3.13 に示すようにせん断面を横切る粒子接点での接平面がせん断面となす角度 θ_i ($i = 1, 2, \dots$; 粒子接点角と名付ける)⁸⁾ や粒子間摩擦角 ϕ_μ が、せん断強度 τ_f に大きく影響することがうかがわれる(粘着性粉粒体の場合には粒子間の粘着力も影響する)。粒子接点角 θ_i は個々の粒子どうしがかみ合う角度を意味するが、簡単のため θ_i の平均値 $\bar{\theta}$ をなす 1 つの摩擦のある斜面で置き換えて考えてみよう(図 2.3.14 参照)。このような近似が許されれば、せん断応力 τ と垂直応力 σ の比 τ/σ は次式で表わされる。

$$\tau/\sigma = \tan(\phi_\mu + \bar{\theta}) \quad (2.3.16)$$

図 2.3.15 は密充てんおよび疎充てんの粉粒体の一面せん断試験(後掲図 2.3.16)におけるせん断応力 τ ~ 水平変位 D 関係、垂直変位 h ~ 水平変位 D 関係の概念図である。この図において、垂直変位 h は下方を圧縮(符号: 正)にとっているので、密充てんの場合せん断応力の増加にともなって膨張するのがみられる。これがダイレイタンシー(dilatancy)と呼ばれる現象であり、その発生機構は図 2.3.13 からも明らかなように密充てんの場合せん断応力を受けて粒子が相対的に移動するためには直下の粒子の上を乗り上がらざるを得ないことから理解される。注目すべきは、密充てんの場合でもせん断初期にいくらか圧縮する傾向を示すこ

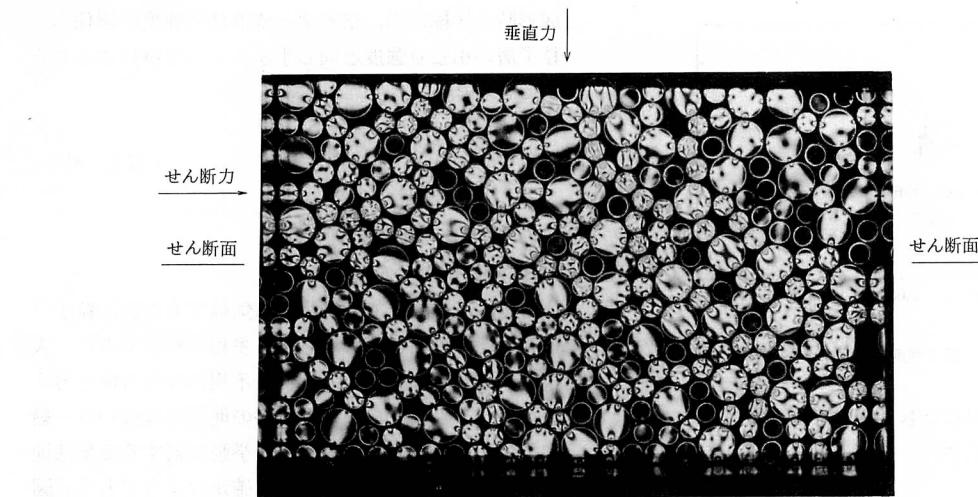
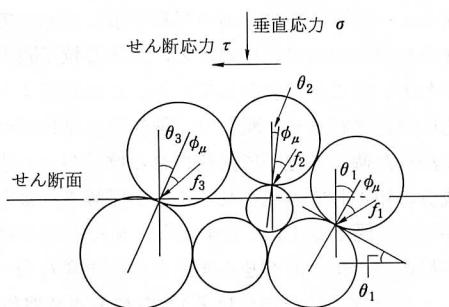
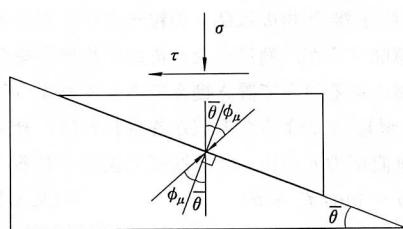


図 2.3.12 光弹性丸棒積層体の一せん断試験中の写真

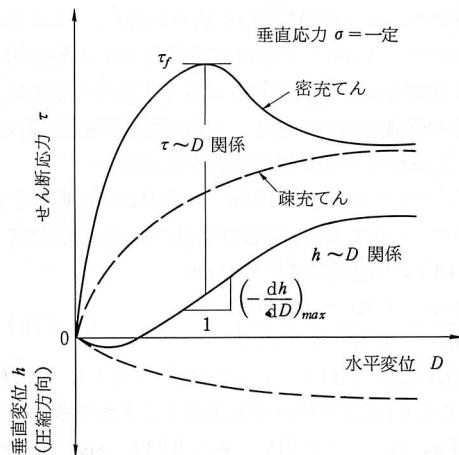
図 2.3.13 せん断面を横切る粒子接点での粒子間力 f_i 、粒子接点角 θ_i 、粒子間摩擦角 ϕ_μ 図 2.3.14 粒子接点角の平均値 $\bar{\theta}$ をなす斜面

とである。これは粉粒体層が振動を受けた場合に粒子間のわずかな隙間に粒子が詰まって体積圧縮することと対応しており、粉粒体の振動特性と密接に関連する現象である。

さて、図 2.3.15 の垂直変位 h ～水平変位 D 曲線の勾配 $(-dh/dD)$ は、図 2.3.14 より平均的に $\tan \bar{\theta}$ に対応すると考えられるので次式を得る。

$$\tan \bar{\theta} = -dh/dD \quad (2.3.17)$$

式(2.3.16)、(2.3.17)より $(-dh/dD)$ が最大のときにせん断応力 τ がピーク値(せん断強度 τ_f)となるこ

図 2.3.15 密充てんおよび疎充てんの粉粒体の τ ～ D 関係、 h ～ D 関係の概念図

とは容易に理解されるが、このことは再現性の高い実験事実である(図 2.3.15 参照)。また垂直変位 h の最大圧縮点($dh/dD = 0$)において、密充てん、疎充てんにかかわらず τ/σ が一定値をとるという実験事実もよく観察されるが、式(2.3.16)、(2.3.17)によればこの一定値は粒子間摩擦係数 $\tan \phi_\mu$ に相当するものと考えられる。以上の考察よりせん断強度 τ_f の表現式として次式を得る。

$$\tau_f = \sigma \cdot \tan(\phi_\mu + \bar{\theta}_{\max}) \quad (2.3.18)$$

ここに、 $\bar{\theta}_{\max}$ は平均的な粒子接点角 $\bar{\theta}$ の最大値を意味する。

一方、周知のようにクーロンの摩擦法則は内部摩擦角を ϕ として次式で与えられる。

$$\tau_f = \sigma \cdot \tan \phi \quad (2.3.19)$$

式(2.3.18), (2.3.19)を比較すれば、内部摩擦角 ϕ の中身は粒子間摩擦角 ϕ_u と粒子の充てん構造に関係する平均的な粒子接点角の最大値 $\bar{\theta}_{max}$ のようなものから成ると推察される。なお、一般的な表現式として粘着力 c を加えた次式が用いられている。

$$\tau_f = c + \sigma \cdot \tan \phi \quad (2.3.20)$$

上式において、粘着力 c の正体を明らかにすることはむづかしい問題である。例えば、式(2.3.18)において σ が大きくなるほど $\bar{\theta}_{max}$ が小さくなるような傾向があれば、粒子間の粘着力のようなものが全くない非粘着性粉粒体においても見掛け上粘着力 c が現われることに注意すべきである。実際問題としては、いくつかの垂直応力 σ のもとでせん断強度 τ_f を測定し、式(2.3.20)を現象論的にあてはめることが行なわれている(後掲図2.3.18参照)。

(2) 粉粒体のせん断試験

粉粒体の破壊は、粒子自身の破壊というよりも粒子間の相対ズレによるものと考えられる。すなわち、粉粒体の破壊はせん断破壊であり、圧縮してもせん断で破壊する(後掲の図2.3.20参照)。この意味において、粉粒体の強度特性や変形特性を調べるために各種のせん断試験が行なわれる。ここでは、一面せん断試験、三軸圧縮試験、やや特殊なものとして平面ひずみ試験および三主応力制御試験について解説する。

a) 一面せん断試験

これは図2.3.16に示すようにあらかじめ規定されたせん断面に直接せん断応力、垂直応力を載荷するタイプの試験であって、原理が理解しやすいこと、乾燥した粉粒体試料をセットしやすいためなどの理由からよく用いられている^{9,10,11)}。図2.3.17は密充てんの乾燥豊浦砂の一面せん断試験結果(垂直応力 $\sigma = 98, 196, 294 \text{ kPa}$ の3種)を示したものである。この図より特徴的なことは、垂直応力 σ の増加に比例してせん断応力 τ も増加すること、 τ の増加の伴って体積膨張すること(ダイレイタンシー現象)、 $(-\frac{dh}{dD})_{max}$ のとき τ もほぼピーク値をとることなどである。図2.3.18は、

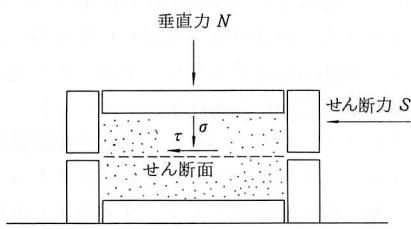


図2.3.16 一面せん断試験の概念図

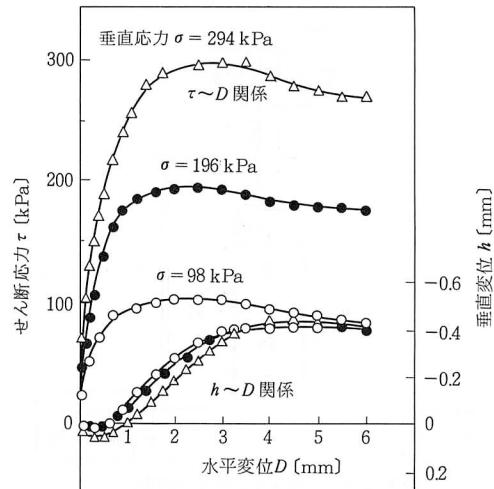


図2.3.17 密充てん乾燥豊浦砂の一面せん断試験結果

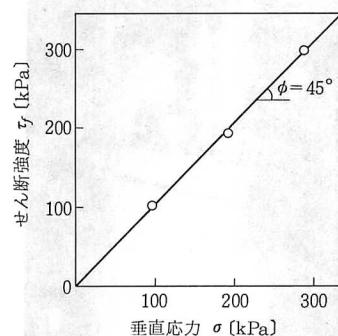


図2.3.18 せん断強度 τ_f ~ 垂直応力 σ 関係

図2.3.17の3種の σ に対するせん断強度 τ_f をプロットしたものである。式(2.3.20)を参照すれば、内部摩擦角 $\phi = 45^\circ$ 、粘着力 $c = 0$ であることがわかる。なお、一面せん断試験によると一般に強度を高く測定するといわれているが、これはせん断中に試料が膨張するとき、せん断箱内面との間に働く下向きの摩擦力によるものと考えられている¹²⁾。

b) 三軸圧縮試験

図2.3.19に三軸圧縮試験機の概念図を、図2.3.20に水で飽和された豊浦砂のせん断破壊の状況を示す。これらの図からわかるように、三軸圧縮試験は最大主応力 σ_1 を軸方向のピストンによって、2つの最小主応力 σ_3 を液圧で載荷するタイプの試験であり、主応力によってある面にせん断応力を発生させ間接的にせん断破壊させるものである。非粘着性粉粒体の場合も、試料を水で飽和させ負圧をかけてから型枠をはずせば、大気圧により試料が自立するのでセットが可能となる¹³⁾。

図2.3.21は密充てんの飽和豊浦砂の三軸圧縮試験

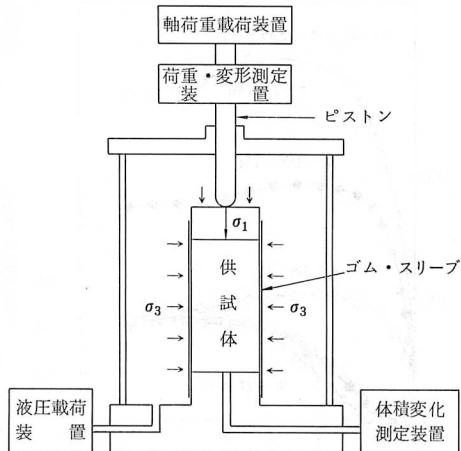


図 2.3.19. 三軸圧縮試験機の概要図

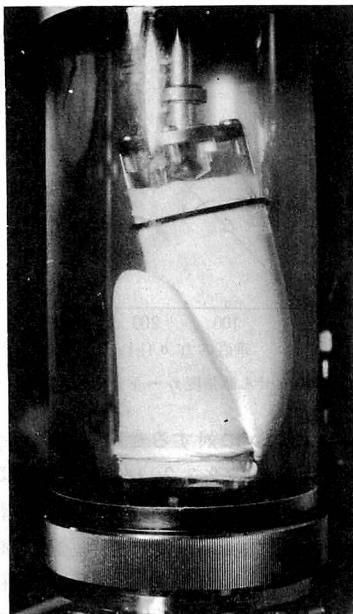


図 2.3.20 三軸圧縮試験における豊浦砂のせん断破壊状況

結果(液圧 $\sigma_3 = 98, 196 \text{ kPa}$ の 2 種)を示したものである。図中の ϵ_1 は円柱形供試体の軸方向ひずみ(最大主ひずみ)を表わしている。また図 2.3.21 は図 2.3.21 の 2 種の σ_3 における破壊時のモールの応力円とそれに外接する破壊包絡線を示したものである。この直線の勾配より $\phi = 40^\circ$, 縦軸切片より $c = 0$ であることがわかる。

c) 平面ひずみ試験および三主応力制御試験

粉粒体層が図 2.3.19, 2.3.20 に示すような軸対称応力条件(最大主応力 $\sigma_1 >$ 中間主応力 $\sigma_2 =$ 最小主応力

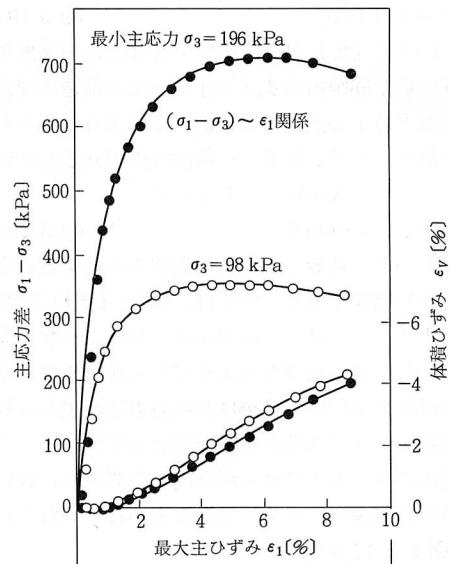


図 2.3.21 密充てんの飽和豊浦砂の三軸圧縮試験結果

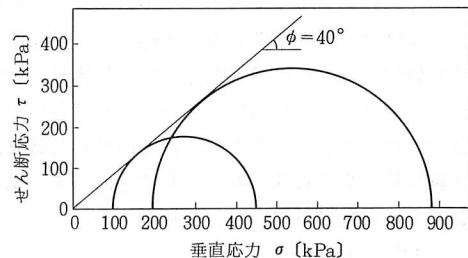


図 2.3.22 破壊時のモールの応力円と破壊包絡線

σ_3) 下で圧縮されることはまれで、一般には 3 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が異なる場合が多い。また、壁面などの影響によって一方向の変位が許されない場合も見受けられる。このような場合を再現する試験として、図 2.3.23 に示すような一方の変位を拘束する平面ひずみ試験(3 主ひずみ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ の内の中間主ひずみ $\epsilon_2 = 0, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) や三主応力制御試験($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) が開発されている¹¹⁾。

平面ひずみ試験の場合には、変位拘束板と試料間の摩擦の除去に努めても大なり小なり摩擦は存在するので、変位拘束方向の試料長さを長くして摩擦の影響を小さくする方法が有効であろう。平面ひずみ条件下の内部摩擦角 ϕ は三軸圧縮条件下的 ϕ よりも 10~15% 程度大きくなるといわれている。三主応力制御試験は、任意の 3 主応力を独立に載荷できる試験であって、3 方向とも剛な板で載荷する方式、3 方向とも柔なゴム・バッグで載荷する方式、両者を組み合せた複合方式、

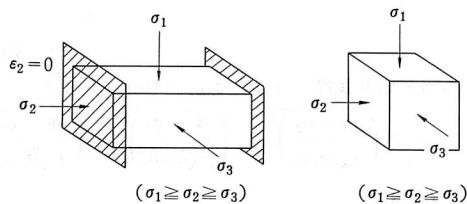


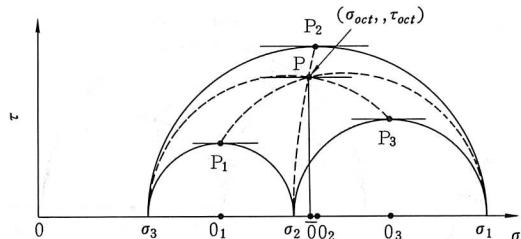
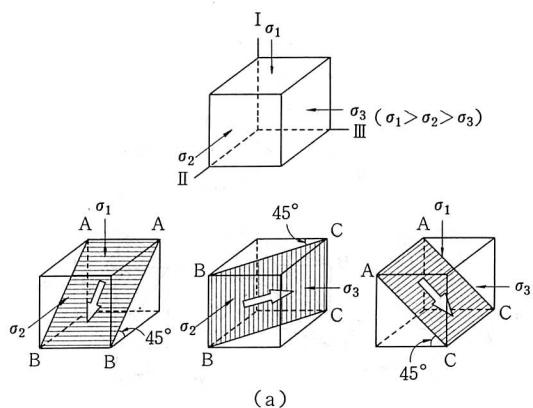
図 2.3.23 平面ひずみ試験と三主応力制御試験の概念図

および中空円筒試料に載荷する方式の大別して 4 種に分類されよう¹¹⁾。いずれの方法にも長所短所があって一概にどれが良いとはいえないが、最も肝要な点は隣接する載荷板どうしの相互干渉と、試料と載荷板の間の摩擦を低減する工夫にあると考えられる。

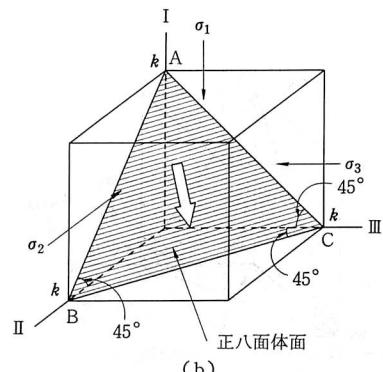
(3) 粉粒体の破壊規準

各種材料の破壊規準としては、金属材料などを対象としたトレスカ(Tresca)規準やミーゼス(Mises)規準、粉粒体、土質材料などを対象としたモール・クーロン(Mohr-Coulomb)規準が著名である。ここでは、これらの破壊規準の相互関係を整理するとともに、モール・クーロン規準の 3 次元への拡張と考えられる松岡・中井規準¹³⁾を紹介する。

相異なる 3 主応力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)下ではモールの応力円は 3 個描けるが、各 2 主応力間で最大のせん断応力 τ_{max} が作用する各応力円の頂点(図 2.3.24 の点 P_1, P_2, P_3)と、最大のせん断・垂直応力比(τ/σ)_{max} が作用する原点からの直線の各応力円への接点(図 2.3.26 の点 P_1, P_2, P_3)に着目する。 τ_{max} の作用面が図 2.3.25(a)に示す 3 個の「45°面」であり、(τ/σ)_{max} の作用面が図 2.3.27(a)に示す 3 個の($45^\circ + \phi_{moij}/2$)面($i, j = 1, 2, 3; i < j$)である。この($45^\circ + \phi_{moij}/2$)面は潜在的なすべり面を意味し、「滑動面」(Mobilized Plane)¹⁴⁾と呼ばれている。例えば、図 2.3.26 の ϕ_{mo13} が内部摩擦角 ϕ に等しくなったとき、図 2.3.27(a)の面 AC が($45^\circ + \phi/2$)面となってすべり面になると考へられる¹⁵⁾。図 2.3.25(a)の 3 個の「45°面」を 3 辺とする面が図 2.3.25(b)に示す「正八面体面」(Octahedral Plane)であり、図 2.3.27(a)の 3 個の「滑動面」を 3 辺とする面が図 2.3.27(b)に示す「空間滑動面」(Spatially Mobilized Plane; SMP)¹³⁾と呼ばれているものである。正八面体面上の垂直応力 σ_{oct} 、せん断応力 τ_{oct} は図 2.3.24 の点 P に対応し、空間滑動面上の垂直応力 σ_{SMP} 、せん断応力 τ_{SMP} は図 2.3.26 の点 P に対応している¹⁶⁾。なお、図 2.3.24、2.3.26において、点 O_1, O_2, O_3, \bar{O} はそれぞれ σ 軸上の $(\sigma_2 + \sigma_3)/2, (\sigma_3 + \sigma_1)/2, (\sigma_1 + \sigma_2)/2, (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ なる点を示している。

図 2.3.24 45°面および正八面体面上のせん断応力と垂直応力
(佐武¹⁶⁾による)

(a)

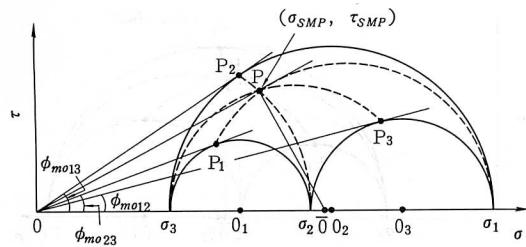
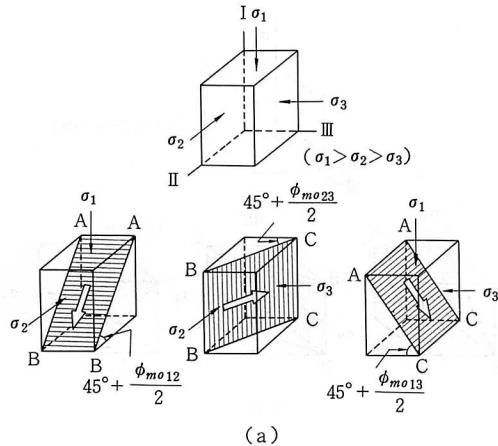


(b)

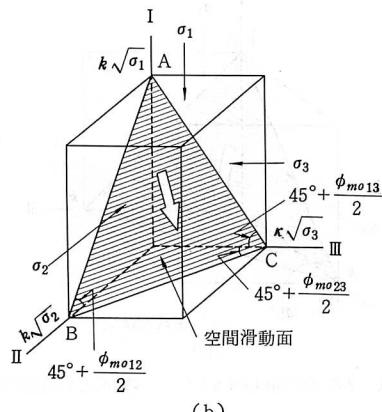
図 2.3.25 3 次元空間内の(a)3つの45°面と(b)正八面体面

さて、図 2.3.24において、最大せん断応力説であるトレスカ規準は $\tau_{max} = P_2 O_2 = \text{const.}$ 、ミーゼス規準は $\tau_{oct} = P \bar{O} = \text{const.}$ と表現される。図 2.3.26において、最大せん断・垂直応力説であるモール・クーロン規準(粘着力 $c = 0$ の場合)は $(\tau/\sigma)_{max} = \tan \angle P_2 O_2 O_2 = \text{const.}$ 、松岡・中井規準は $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = \tan \angle P_2 O_2 O_2 = \text{const.}$ と表わされる。式示すれば次のようになる。

$$\text{トレスカ規準 : } \tau_{max} = P_2 O_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \text{const.} \quad (2.3.21)$$

図 2.3.26 滑動面および空間滑動面上のせん断応力と垂直応力(佐武¹⁶⁾による)

(a)



(b)

図 2.3.27 3次元空間内の(a)3つの滑動面と(b)空間滑動面

$$\text{ミーゼス規準: } \tau_{oct} = P\bar{O}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2} \\ = \text{const.} \quad (2.3.22)$$

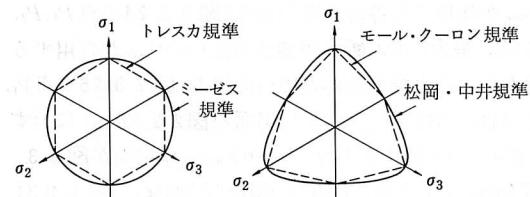
$$\text{モール・クーロン規準: } (\tau/\sigma)_{max} = \tan \angle P_2 O O_2$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_3}}$$

$$= \text{const.} \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{松岡・中井規準: } \tau_{SMP}/\sigma_{SMP} &= \tan \angle P_2 O \bar{O} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_2 \sigma_3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2\sqrt{\sigma_3 \sigma_1}}\right)^2} \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

式(2.3.21)～(2.3.24)より、ミーゼス規準がトレスカ規準の平方平均(2乗和の平方根)の形であるのと全く同様に、松岡・中井規準はモール・クーロン規準の平方平均の形をしているのがみられ、4つの規準間には明確な相互関係が存在する。なお、上式より明らかなように、中間主応力 σ_2 の影響はトレスカ規準やモール・クーロン規準では考慮されていないのに対して、ミーゼス規準や松岡・中井規準では考慮された形になっている。図 2.3.28 は正八面体面上での4つの規準の相互関係を、図 2.3.29 は応力空間における4つの規準の立体的な形状を図示したものである。また、図 2.3.30 は正八面体面上で表わした三主応力制御試験による豊浦砂の破壊時の応力状態(■印)を示している。¹⁷⁾なお、図中の○印は通常の円柱形供試体に対する三軸圧縮試験($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$)および三軸伸張試験($\sigma_1 = \sigma_2 >$



トレスカ規準 ←→ モール・クーロン規準

ミーゼス規準 ←→ 松岡・中井規準

図 2.3.28 正八面体面上でみた4つの破壊規準の相互関係

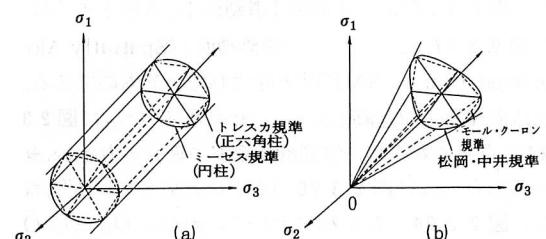


図 2.3.29 3次元応力空間内で表わした(a)トレスカおよびミーゼス規準と(b)モール・クーロンおよび松岡・中井規準

2.3 強度

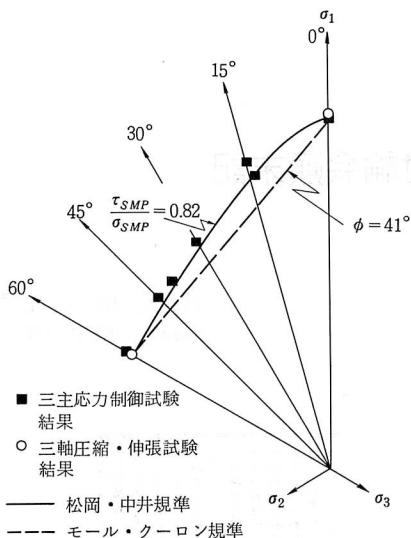


図 2.3.30 正八面体面上で表わした豊浦砂の破壊時の応力状態とモール・クーロン、松岡・中井規準

σ_3)の結果を表わしており、■印と○印がほぼ一致することによりこの三主応力制御試験の精度が高いと考えられる。

以上より、最大せん断応力で規定される金属材料の場合には「45°面」やそれを平均化した「正八面体面」が意味をもち、最大せん断・垂直応力比で規定される粒状材料の場合には「滑動面」やそれを平均化した「空間滑動面」が意味をもつことが理解されよう。ここで、粒状材料の破壊や変形が最大せん断・垂直応力比で規定されるのは、その構成粒子間のすべりが摩擦法則、すなわち巨視的にはせん断・垂直応力比に支配されていることに基づいている。このように、粉粒体や土のような粒状材料によって本質的な意味をもつのは、図 2.3.27(a), (b) に示す滑動面(3個合せて複合滑動面¹⁴⁾と呼ぶ)や空間滑動面であり、それらに基づいたモール・クーロン規準や松岡・中井規準であると考えられる。

<以上 松岡>

文

- 1) 長尾高明：機械学会論文集, 43, 4038 (1977)
- 2) 金谷健一：粉体工学会誌, 17, 504 (1980)
- 3) 植淳一郎：粉体工学会誌, 21, 30 (1984)
- 4) Tsubaki, J. and G. Jimbo : Powder Technol., 37, 219 (1984)
- 5) Rumpf, H. : Chem. Ing. Tech., 42, 538 (1970)
- 6) 植淳一郎, 神保元二, 田中英利 : 化学工学協会秋田大会要旨集 (1984, 秋田)
- 7) 高橋実, 鈴木傑, 小林種雄, 荒木規 : 材料, 31, 873 (1982)
- 8) Matsuoka, H. : Soils and Foundations (土質工学会論文報告集), 14, [1], 29~43 (1974)
- 9) 井伊谷鋼一編 : 粉体工学ハンドブック, 6. 摩擦係数 (青木隆一), 朝倉書店 (1965)
- 10) 粉粒体計測ハンドブック, 日本粉体工業協会編 (1981)
- 11) 土質工学会編 : 土質試験法(第2回改訂版), 第6編

献

- 1) 土の力学的性質の試験(II) (1979)
- 2) 井上広胤 : 土木学会論文集, 101, 15~24 (1964)
- 3) Matsuoka, H. and T. Nakai Proc. Japan Society of Civil Engineers (土木学会論文報告集), 232, 59~70 (1974)
- 4) Matsuoka, H. : Soils and Foundations (土質工学会論文報告集), 14, [2], 47~61 (1974)
- 5) Murayama, S. : Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mechanics, 146~159 (1966)
- 6) Satake, M. : Proc. U.S.-Japan Seminar on Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, 154 (1978)
- 7) 中井照夫, 松岡元 : 土木学会論文報告集, 303, 65~77 (1980)